# 四庫全書

子部

數度衍卷十

桐城　方中通　撰

較容　少廣之三

同周異容

通曰周不可以論容故方田不以周步爲率同周者形必異形異容故異耳

式一同周多邊形容積大於少邊形容積何也少邊如甲乙丙三角形甲乙甲丙兩腰各五乙丙底六共周十

六多邊如巳庚戊辛四角形巳戊庚辛與三角之腰等皆五巳庚戊辛與三角之半底等各三共周亦十六以三角用甲丁垂線折半得甲丁乙甲丁丙兩小三角形以四角形巳戊庚辛與甲丁較去巳壬庚癸存壬戊癸辛皆與甲丁等是壬癸戊辛小四角形內可容甲乙丙三角形也癸辛戊癸壬戊與甲丁乙甲丁丙皆等耳四角形是多一巳壬癸小四角形矣

式二同周四直角形等邊容積大於不等邊容積何也

等邊如甲乙丙丁四直角形每邊六共周二十四不等邊如戊己庚辛四直角形兩邊五兩邊七共周亦二十四以等邊之六自乘得積三十六以不等邊之五七相

甲 乙 六 丁 六 丙

戊 己 七 辛 五 庚

乘得積三十五是不等邊之積少一矣又如兩邊四兩邊八共周亦二十四而積三十二又少矣兩邊三兩邊九共周亦二十四而積二十七又少矣兩邊二兩邊十共周亦二十四而積二十又少矣邊愈不等積愈少也

通曰又如四邊皆三周得十二積九兩邊二兩邊四周亦十二積八是九之中一藏而無周八無中可藏故少一也右式等邊形中有離邊積十六不等邊形中止有離邊積十五可見少一積者非少近邊之積乃少離邊之中積也

式三同周等邊四角形直角容積大於斜角容積何也

直角如甲乙丙丁四角形每邊五共周二十斜角如戊己丙丁四角形每邊五共周二十以斜角截戊庚丁三角形補己辛

丙三角形適足是庚辛丙丁形與戊巳丙丁形之容等矣以直角截庚辛丙丁外尚餘甲乙庚辛形乃多於斜角者也

式四同周有法形多邊容積大於少邊容積何也多邊如甲乙丙有法形邊邊相等角角相等曰有法也不拘邊數今為六邊每邊四共周二十四少邊如丁戊巳有法形今為四邊每邊六共周亦二十四試於兩形外各

作一圜而從圜心望一邊作庚壬作辛癸兩垂線平分乙丙於壬戊巳於癸其甲乙丙形多邊者與丁戊巳形少邊者外周既等而以乙丙求周六其乙丙而徧以戊巳求周四其戊巳而徧則乙丙邊固小於戊巳邊而乙壬半線亦小於戊癸半線矣茲截癸子與壬乙等而作辛子線又作辛戊辛巳及庚丙庚乙諸線次第論之其巳丁戊圜內各切線等即勻分各邊俱等而全形邊所倍於戊巳一邊數與全圜切分所倍於戊巳切分地亦等則甲乙丙內形全邊所倍於乙丙一邊與其全圜切

分所倍於乙丙切分不俱等乎其戊巳圜切分與戊丁巳全圜之切分若戊辛巳角之與全形四直角則以平理推之移戊巳邊於甲乙丙全邊亦若戊辛巳角之於四直角也而甲乙丙內形周與乙丙一邊猶甲乙丙諸切圜與乙丙界之一切圜亦猶四直角之與庚乙丙角也則又以平理推戊巳與乙丙即戊癸與乙壬而乙壬即是癸子又以平理推戊辛巳角與乙庚丙角亦若戊辛癸之與乙庚壬也夫戊癸與癸子之比例原大於戊辛癸角與子辛癸角之比例則戊辛癸與乙庚壬之比

例大於癸辛戊與癸辛子之比例而癸辛子角大於壬庚乙角其辛癸子與庚壬乙皆係直角而辛子癸角明小於庚乙壬角令移壬乙庚角於癸子上而作癸子丑角則其線必透癸辛到丑其庚壬乙三角形之壬與乙兩角等於丑癸子三角形之癸子兩角而乙壬邊亦等於子癸邊則丑癸線亦等於庚壬線而庚壬實羸於辛癸令取庚壬線及甲乙丙半周線作矩內直角形必大於辛癸線及丁戊巳半周線所作矩內直角形也然則多邊直線形之所容豈不大於等周少邊直線形之所

容乎

式五同周等底三角形等邊容積大於不等邊容積何

也等邊如甲丁丙三角形丁甲甲丙丙丁各六共周十八不等邊如乙甲丙等甲丙底三角形甲丙六乙甲七乙丙五共周亦十八試引甲丁至戊

令丁戊與丁甲等亦與丁丙等又作丁乙乙戊兩線夫甲乙乙戊合線既大於甲戊即大於甲丁丁丙合線亦大於甲乙乙丙合線此兩率者令減一甲乙則乙戊大

於乙丙而丁戊乙三角形之丁戊丁乙兩邊與丁丙乙三角形之丁丙丁乙兩邊等其乙戊底大於乙丙底則戊丁乙角大於丙丁乙角而戊丁乙角踰戊丁丙角之半令别作戊丁巳角與丁甲丙角等則丁巳線在丁乙之上而與甲丙平行又令引長丁巳與甲乙相遇而作巳丙線連之其甲丁丙甲巳丙既在兩平行之內又同底是三角形相等也因顯甲巳丙大於甲乙丙而甲丁丙等邊三角形必大於乙甲丙不等邊三角形矣

通曰以丁庚甲三角形與乙庚丙三角形相較知乙庚

丙之小於丁庚甲即知乙甲丙之小於甲丁丙也

弍六同周多邊形等邊容積大於不等邊容積何也等邊如甲庚丙丁戊巳多邊形每邊六共周三十六不等邊如甲乙丙丁戊巳多邊形甲乙邊四乙丙邊八他邊皆六共周亦三十六作甲丙線視甲庚丙大於甲乙丙則知甲庚丙丁戊巳大於甲乙丙丁戊巳也

庚 乙 辛 丙 甲 丁 巳 戊

通曰甲乙辛與辛庚丙兩形較知甲乙辛小於辛庚丙即知甲乙丙丁戊巳小於甲庚丙丁戊巳也

弍七同周多邊等邊形等角容積大於不等角容積何

也通曰等角如子丑寅卯辰午多邊等邊形每邊十共周六十不等角如甲乙丙丁戊己多邊等邊形每邊亦十共周亦六十作丑午線得十八作丑卯線亦得十八丑午既與丑卯等則子申必與寅未等是午子丑與丑寅卯之子角寅角等也又作乙己線少於十八作乙丁線多於十八乙丁既大於乙己則甲庚必大於丙辛是己甲乙與乙丙

丁之甲角丙角不等也今以兩形疊而較之今巳戊與



午辰同線又令子遇甲乙線於子卯遇丙丁線於卯乃視并甲子巳與卯丁戊兩小三角形不及于丑寅卯丙乙一曲角形則知甲乙丙丁戊巳形小於子丑寅卯辰午形矣

式八同周圓形容積大於有法形容積何也圓形如甲乙丙形周五十四有法如丁戊巳形每邊九共周亦五十四庚為甲乙丙之心辛為丁戊巳之心甲乙丙外另作壬乙丙癸多邊形與丁戊巳相似同為有法之六角形而從壬

癸切圓於甲者作半徑線於庚則庚甲為壬癸垂線而分壬癸之半又從辛作子丑垂線則辛丁亦分子丑之半兩形相似其壬全角與子全角等則半之而甲壬庚角與丁子辛角亦等壬甲庚直角與子丁辛直角亦等然乙壬癸丙之周大於圓周而圓周與丁戊巳形同則是乙壬癸丙周原大於丁戊巳周矣夫兩形相似而壬癸邊大於子丑邊則半之而壬甲亦大於子丁又壬甲與甲

庚若子丁與丁辛之比例而壬甲大於子丁則甲庚亦大於丁辛是故取甲庚線與半圓周線以作矩內直角形其與圓地等也大於取丁辛線與丁戊巳半周線以作矩內直角形其與形地等也推此則見圓形大於等周之多邊形也

通曰圓周五十四圓外六角周六十是多六矣雖與丁戊巳六角相似而周不同也

今以同周之甲乙丙丁戊巳兩形相較圓形外有六小三角形圓內有六小弧矢形知小三角之不及小弧矢

即知丁戊巳之小於甲乙丙也

式九同周渾圓形容積大於長圓形容積何也通曰渾圓如甲乙丙丁戊巳形周三十六長圓如庚丙癸戊辛巳壬乙形周亦三十六今以兩形相較長圓加渾圓之上必透乙庚丙巳辛戊兩半圓形必虛丙丁戊癸乙甲巳壬兩半圓形以乙庚丙半圓形與丙丁戊癸半圓形相較則乙庚丙形必小以乙甲巳壬半圓形與巳辛戊半圓形相較則乙甲巳壬形必大即知甲乙丙丁戊巳形大於

庚丙癸戊辛巳壬乙形矣

通曰邊莫少於三角莫多於渾圓渾圓似乎無角而其角之多不可指說也同周之容其角漸多其容漸大故以渾圓為最大以三角為最小益大者因角而大也角向外生內必益地雖中距之徑少不敵角增之地多也方者不以角論長方與正方同為四角直方與斜方同亦四角一增於中藏之無邊一減於斜周之無積故以長方斜方為小以正方直方為大也其不成形者不可槩舉矣

同容異周

通曰有積於此可方可圓可斜可直周之不一其積實同周既不可以論容容亦不可以論周也

式同容少邊形周大於多邊形周何也少邊如甲乙丙形多邊如甲巳丙丁形以甲乙丙形分為二得甲丁丙甲丁乙兩形以甲巳丙丁形分為二得甲巳丙甲丁丙兩形相較皆等容而甲丙長於巳丙甲乙長於甲丁是以少邊者為大也

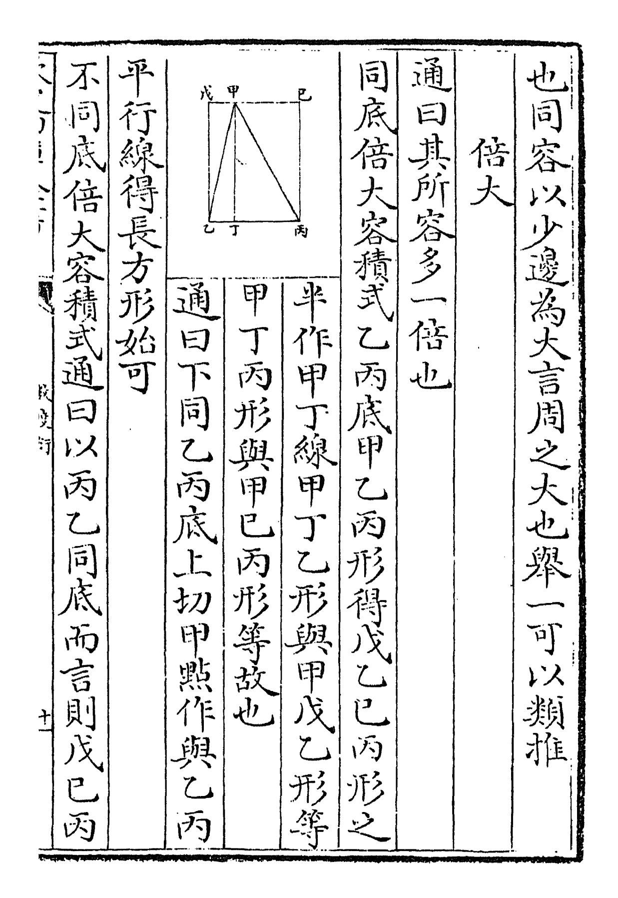
通曰此與同周異容相反同周以少邊為小言容之小

也同容以少邊為大言周之大也舉一可以類推

倍大

通曰其所容多一倍也

同底倍大容積式乙丙底甲乙丙形得戊乙巳丙形之




半作甲丁線甲丁乙形與甲戊乙形等

甲丁丙形與甲巳丙形等故也

通曰下同乙丙底上切甲點作與乙丙

平行線得長方形始可

不同底倍大容積式通曰以丙乙同底而言則戊巳丙

乙形倍於甲乙丙形以丙乙與丙丁不同底而言則甲己丙丁形兩倍於甲乙丙形蓋甲戊丙乙形與戊己丙乙形等則甲丙線分甲戊丙乙為甲乙丙甲丙戊兩形是甲乙丙形為戊己丙乙形之半即為甲己丙丁形四之一也

變形同容

通曰此形容積亦可以他形容之蓋不變容而變形也

六角變四角式六角如甲乙丙丁戊己有法形欲變為四角形視六角之心於庚自庚至甲乙作直角線為庚




辛另作壬癸線與庚辛等作癸子與甲乙丙丁線等則壬癸子丑四角形與甲乙丙丁戊巳六角形之所容等也

論曰自庚到各角皆作直線皆分作三角形皆相等其甲乙庚三角形與甲辛辛庚二線所作矩内直角形等若以甲乙丙丁半形之周線為癸子線以與壬癸線共作矩内直角形即與有法全形等盖比半邊三其三角形照甲乙庚形作分中垂線其矩線内直角形俱倍本

三角形故也

通曰半徑線作横線半周線作直線兩形之容相等則以六角形之全徑全周作四角形其容四倍矣然六角之徑必須兩角中分之辛寅相對為徑非角對角之甲丁為徑也

六角變三角式六角如甲乙丙有法形欲變為三角形視六角之心於丁從丁望甲乙作埀線為丁戊線另作丁戊線相等作戊巳線與甲乙丙全周線等則丁戊庚巳四角形倍於甲乙丙六角形今以丁戊庚巳分為二

得丁巳戊三角形與甲乙丙六角形之所容等也

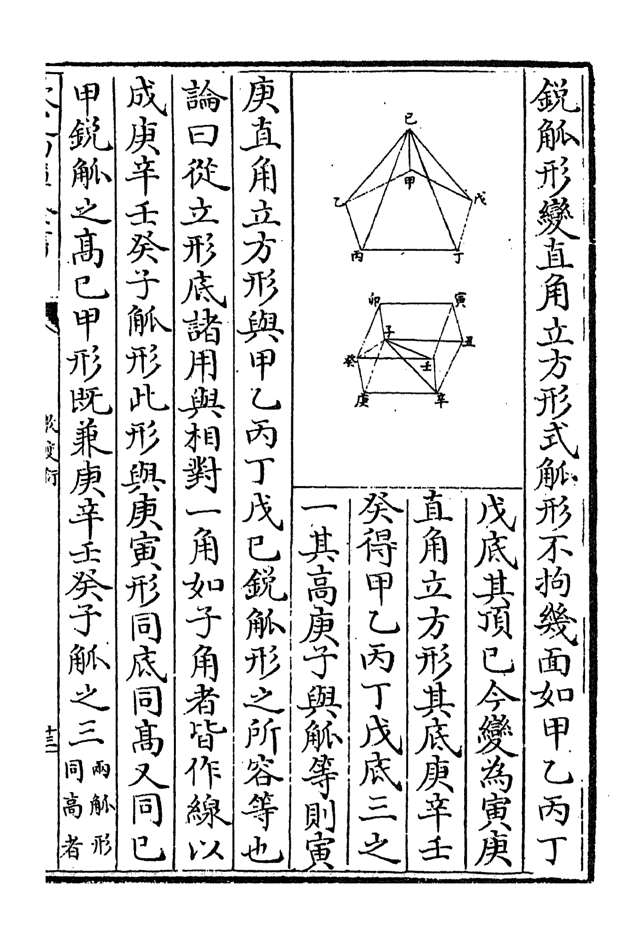
論曰以丁戊巳庚直角形兩平分於壬辛作直線與丁戊平行則丁戊辛壬直角形與甲乙丙形相等何者戊辛線得甲乙丙之半周而又在丁戊矩內即與有法形全體等故也其丁戊巳三角形與丁戊壬辛直角形等則丁戊巳三角形與甲乙丙全形自等矣

圜形變四角三角式圜形如甲乙丙形先變為四角形

甲 丙 丁 乙 丁 己 辛 庚 乙 戊

視圓心於丁得半徑丁乙線另作丁乙線相等作乙戊線與甲乙丙半周線等則丁乙戊已四角形與甲乙丙圓形之所容等也次變為三角形倍乙戊線為乙庚線與甲乙丙全周等又作丁庚線則丁乙庚三角與甲乙丙圓形之所容等也

通曰截丁已辛形為辛戊庚形則丁乙戊已形內虛丁已辛地與丁乙戊已形外盈辛戊庚地相等則等圓形之四角變為三角等四角之三角自等於圓形也




鋭觚形變直角立方形式觚形不拘幾面如甲乙丙丁戊底其頂巳今變為寅庚直角立方形其底庚辛壬癸得甲乙丙丁戊底三之一其高庚子與觚等則寅庚直角立方形與甲乙丙丁戊巳鋭觚形之所容等也

論曰從立形底諸用與相對一角如子角者皆作線以成庚辛壬癸子觚形此形與庚寅形同底同高又同巳甲鋭觚之高巳甲形既兼庚辛壬癸子觚之三兩觚形同高者

其所容之比例如其底底等亦等底倍亦倍則寅庚全形亦兼庚辛壬癸子廝之三是寅庚全方與巳甲廝自等也

斜角能含圓形變直角立方形式平面不拘幾邊其全體可容渾圓切形如甲乙丙丁形內含戊巳庚辛圜其心壬而外線甲乙切圜於戊試從戊壬割圜之半作戊巳庚辛圜從壬心望各切圜之點作壬戊為甲乙垂線壬巳為乙丙垂線壬庚為丙丁垂線壬辛為甲丁垂線今變為直角立

方午子形其底子辰卯癸得甲乙丙丁體三之一而其高丑子與圓半徑等則午子直角立方形與甲乙丙丁全形之所容等也

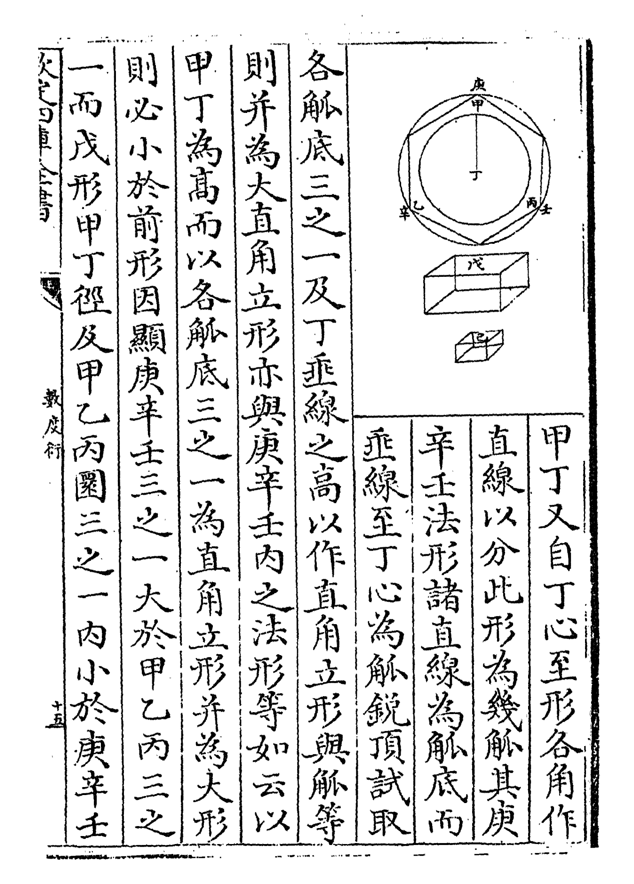
論曰從壬心與甲乙丙丁各角作直線即分其體為數觚形其面即為觚底而皆以壬心為觚銳頂此各觚皆以其三分底之一及至銳高之數為直角立方形皆與觚所容等又并為一形即與甲乙丙丁體等亦與午子等以午子底正得甲乙全形三之一而其高合圓之半徑也

渾圓變直角六方形式渾圓如甲乙丙形其心為丁作甲丁半徑線令變為直角立方戊形在甲丁徑及甲乙丙渾圓三之一矩內則戊形與甲乙丙全形之所容等



也

論曰若言不等謂戊大於渾圓形其較有已者合以丁為心外作庚辛壬渾圓大於甲乙丙而勿令大於戊第令或等或小以驗之而於庚辛壬內試作有法形勿令切甲乙丙圜自丁心至形邊各作垂線則垂線必長於




甲丁又自丁心至形各角作直線以分此形為幾觚其庚辛壬法形諸直線為觚底而垂線至丁心為觚銳頂試取各觚底三之一及丁垂線之高以作直角立形與觚等則并為大直角立形亦與庚辛壬內之法形等如云以甲丁為高而以各觚底三之一為直角立形并為大形則必小於前形因顯庚辛壬三之一大於甲乙丙三之一而戊形甲丁徑及甲乙丙圜三之一內小於庚辛壬

體若謂庚辛壬不大於戊形則向庚辛壬内之法形亦大於戊形也而况庚辛壬形乎則戊體不大於甲乙丙可知矣

又論曰戊形小於甲乙丙渾圓體者其較為已試從丁心再作癸子丑圜小於甲乙丙而勿令小於戊或大或等者以驗之於甲乙丙圜内作有法形不令切癸子丑而從丁至甲乙丙各面為垂線比垂線大於丁癸之半徑又從丁向法形諸角作直線以

分此形為數觚以形之各面為觚底丁心為觚鋭頂而取觚底三之一及底至丁之垂線以作直角立形與觚等若使以甲丁為高而以各觚三之一為底以作直角立形則其形必高於前形既甲乙丙圜之面大於其内形之面則圜面三之一大於内形面三之一而直角立方形在甲丁高及甲乙丁面三之一因即戊大於甲乙丙之内形矣而云癸子丑圜或等或大於戊豈癸子丑圜大於甲乙丙圜而分大於全乎則戊體不小於甲乙丙又可知矣

相似

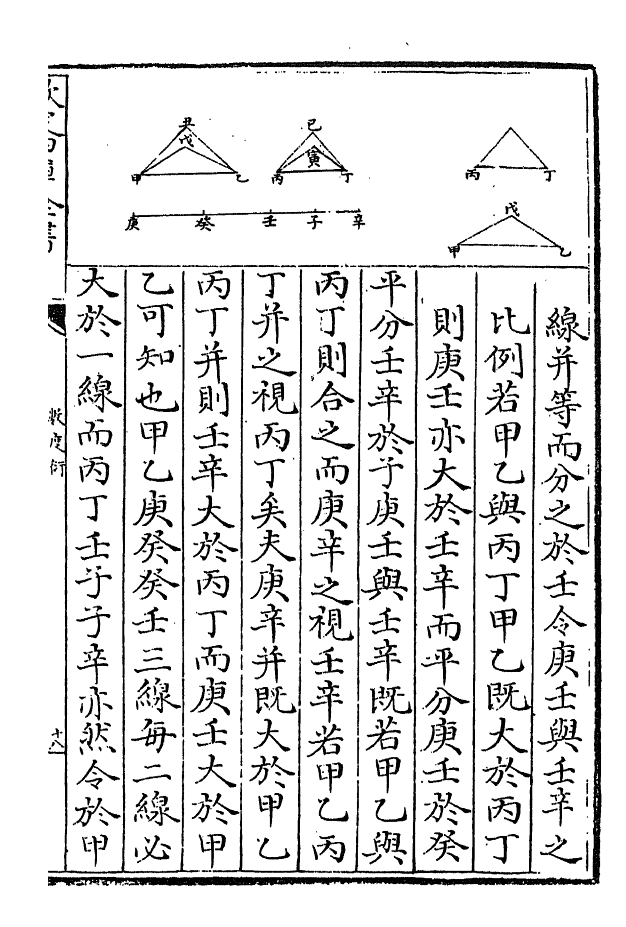
通曰形相似而大小不同也相似者可比例也不相似者非比例也

并線并形求與并線形同容式有甲乙丙及丁戊巳三角形二兩形相似因并甲丙丁巳為丁辛一直線於上作直角方形又并甲乙丁戊為丁庚乙丙戊巳為庚辛乃并此二線上所作兩方形與丁辛線上方形之所容等也

論曰引長丁戊至庚令戊庚與甲乙同度從庚作線與戊巳平行又引丁巳長之令相遇於辛從巳作巳壬線與戊庚平行則巳壬辛之角形與丁戊巳相似而丁戊巳與甲乙丙相似矣何者巳壬辛角與庚角等庚角與丁戊巳角等巳角又與乙角等而辛角與丁巳戊角及兩角俱等壬巳辛角與甲角亦等又巳壬邊與戊庚相等則亦與甲乙相等而壬辛與乙丙巳辛與甲丙俱相等故丁辛線兼丁巳甲丙之度丁庚線兼丁戊甲乙之度庚辛線兼戊巳乙丙之度庚壬即戊巳也然則丁辛

上直角方形與丁庚及庚辛上兩直方形并自相等矣通曰此與勾股求弦相通也丁庚上方形股冪也庚辛上方形勾冪也丁辛上方形弦冪也弦冪之內應有勾股二冪也

兩形互并求同周式甲乙丙丁兩底不等上有甲戊乙丙巳丁三角形二其戊甲戊乙腰與巳丙巳丁腰俱相等若甲乙大於丙丁者則戊角大於巳角而兩三角形不相似求於兩底上各作三角形相似而兩腰各相等其周亦等也其法作庚辛線與甲戊戊乙丙巳巳丁四

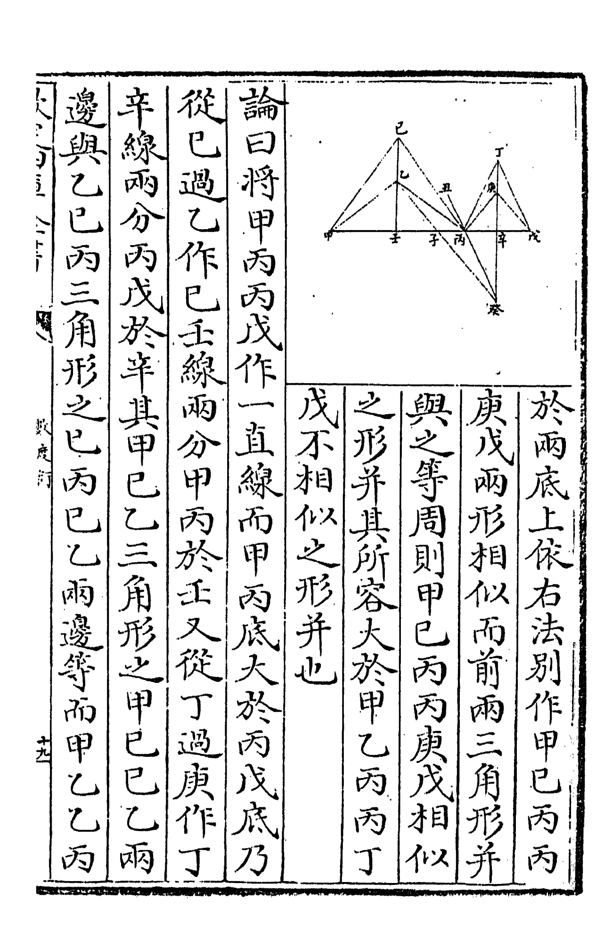



線并等而分之於壬令庚壬與壬辛之比例若甲乙與丙丁甲乙既大於丙丁則庚壬亦大於壬辛而平分庚壬於癸平分壬辛於子庚壬與壬辛既若甲乙與丙丁則合之而庚辛之視壬辛若甲乙丙丁并之視丙丁矣夫庚辛并既大於甲乙丙丁并則壬辛大於丙丁而庚壬大於甲乙可知也甲乙庚癸癸壬三線每二線必大於一線而丙丁壬子子辛亦然令於甲

乙上用庚癸癸壬線作甲丑乙三角形為兩腰等而其周在甲戊乙形之外於丙丁上用壬子子辛線作丙寅丁三角形亦兩腰等而其周在丙巳丁之內則甲丑乙丙寅丁兩形自與甲戊乙丙巳丁兩形同周也

通曰甲丑乙大丙寅丁小甲戊乙小丙巳丁大以大并小以小并大互并而大小隱矣

兩形互并較容式甲丙丙戊大小兩底上設有甲乙丙丙丁戊兩三角形而甲乙乙丙丙丁丁戊四線俱等令




於兩底上依右法別作甲巳丙丙庚戊兩形相似而前兩三角形并與之等周則甲巳丙丙庚戊相似之形并其所容大於甲乙丙丙丁戊不相似之形并也

論曰將甲丙丙戊作一直線而甲丙底大於丙戊底乃從巳過乙作巳壬線兩分甲丙於壬又從丁過庚作丁辛線兩分丙戊於辛其甲巳乙三角形之甲巳巳乙兩邊與乙巳丙三角形之巳丙巳乙兩邊等而甲乙乙丙

兩底又等則甲巳乙角與丙巳乙角亦等又甲巳壬三角形之甲巳巳壬兩邊與丙巳巳壬三角形之丙巳巳壬兩邊等則甲巳壬角與丙巳壬角等而甲壬壬丙之兩底亦等壬之左右皆直角因顯丙辛辛戊亦等而辛之左右角亦直角矣次引丁辛至癸令辛癸與丁辛同度而從癸過丙作癸丑直線則丁丙辛三角形之丁辛辛丙兩邊與辛癸丙三角形之辛癸辛丙兩邊等而辛之上下角亦等為直角丁丙丙癸兩底等而丁丙辛角與癸丙辛角俱等丁丙辛角既大於庚丙辛角而庚丙辛

角相似與巳丙壬角即相等而丁丙辛即癸丙辛總大
於巳丙壬其癸丙辛角等於對角之丑丙壬是丑丙壬
亦大於巳丙壬而引癸丑線當在丙巳之外也若夫癸
丙丙乙二線涵癸丙乙角向壬試作癸乙線以分壬丙
於子而并乙丙丙癸二線必大於癸乙線則巳丙丙庚
并亦大於乙癸線何也此四形者兩兩相并為等周則
甲乙乙丙丙丁丁戊四線并與甲巳巳丙丙庚庚戊四
線并原相等而減半之乙丙丙丁即乙丙丙癸與巳丙
丙庚亦相等故也并巳丙丙庚二線為一直線就其上

作直角方形必大於乙癸線上之直角方形夫巳丙丙庚并之直角方形與巳壬庚辛并之直角方形及壬丙丙辛上之直角方形并相等而癸乙上之直角方形與乙壬并辛丁即辛癸上直角方形及壬子子辛上直角方形并又自相等若移置辛癸于乙壬之下移置壬辛為癸乘線則乙壬辛癸為股壬辛為勾乙癸為弦矣此巳壬庚辛線并之直角方形及壬丙丙辛上之直角方形并明大於乙壬丁辛并之直角方形及壬子子辛上之直角方形并也此兩率者每減一壬辛上直角方形則巳壬庚辛共線上之直角方形大於乙壬丁

辛共線上直角方形矣而巳壬庚辛兩線并大於乙壬丁辛兩線并矣此兩率者令一減乙壬一減庚辛則巳乙豈不大於丁庚乎壬丙原大於丙辛則巳乙與壬丙矩內直角形大於丁庚與辛丙矩內直角形而乙巳丙三角形為巳乙壬丙矩內直角形之半何者令從壬丙作垂線與乙巳平行而以乙巳為底就作直角形此謂巳乙壬丙矩內直角形其中積倍於巳乙丙三角形反之則巳乙丙角形為巳乙壬丙矩形之半其丁庚丙三角形亦然乃丁庚及辛丙矩內直角形之半也則巳乙

丙三角形大於丁庚丙三角形而甲巳丙乙甲形為丙乙巳三角之倍者亦大於丙丁戊庚丙形為丁庚丙三角之倍者矣此兩率者又每加甲乙丙與丙庚戊之三角形則甲巳丙及丙庚戊之兩三角形并豈不大於甲乙丙及丙丁戊兩三角形并哉其底同其周同四腰俱同則不相似之形并必小於相似之形并也

欽定四庫全書

數度衍卷十一

桐城方中通撰

遞加 少廣之四

循次順加

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 十
一

超二位加

一 三 五 七 九 十一 十三 此奇數超加

也

二　四　六　八　十　十二　十四　此偶數超加也

超三位四位五位加

一　四　七　十　十三　十六　十九　此超三位加也

一　五　九　十三　十七　二十一　此超四位加也

一　六　十一　十六　二十一　二十六　此超五

位加也

凡超位加各審其母如超二超三四五以至多位者各以所超之數為母其間少者易知多者難定大率以退位減之餘數即母也

截三位較

不論超與不超凡截位較之其前後二位數必倍於中位數如截一二三并一三為四即倍二也截一三五并一五為

一二三　二四六

一三五　二五八

四八十二

六即倍三也截二四六并二六為八即倍四也截二五八并二八為十即倍五也截四八十二并四與十二為十六即倍八也不拘前後隨意截較無不適合

截四位較

凡截四位較之則前後二位數與中二位數等如截一二三四并一四為五并二三亦五也截一三五七并

一二三四　二四六八

一三五七　二五八十一

四八十二十六

一七為八并三五亦八也截二四六八并二八為十并四六亦十也截二五八十一并二與十一為十三并五八亦十三也截四八十二十六并四與十六為二十并八與十二亦二十也

通曰截奇位者前後并必倍中位數截偶位者前後并必與中二位等葢所截之位自中向外一損一益中一位者無可并而倍矣中二位者無可倍而并矣

截四位遞加遞減較

通曰凡截四位數以中二位相加減後一位數餘與前

一位數等如截一二三四以二三相并得五減後之一餘必前之四也截一三五七以三五相并得八減後之一餘必前之七也截二四六八以四六相并得十減後之二餘必前之八也截二五八十一以五八相并得十三減後之二餘必前之十一也截四八十二十六以八與十二相并得二十減後之四餘必前之十六也若減前數餘必後數可以互較

超加求積法

凡加數不論超二超三但係遞加者用此

式自一起至十三位得三十七問總積幾何曰二百四

一首位 四次位 七 十 十三
十六 十九 廿二 廿五 廿八
卅一 卅四 卅七末位 超三加

十七術除首位一不用以次位四與末位三十七并得四十一自四至三十七係十二位即以十二乘四十一得四百九十二半之得二百四十六即十二位總積再加首位一得二百四十七為十三位總積也

順加求積法

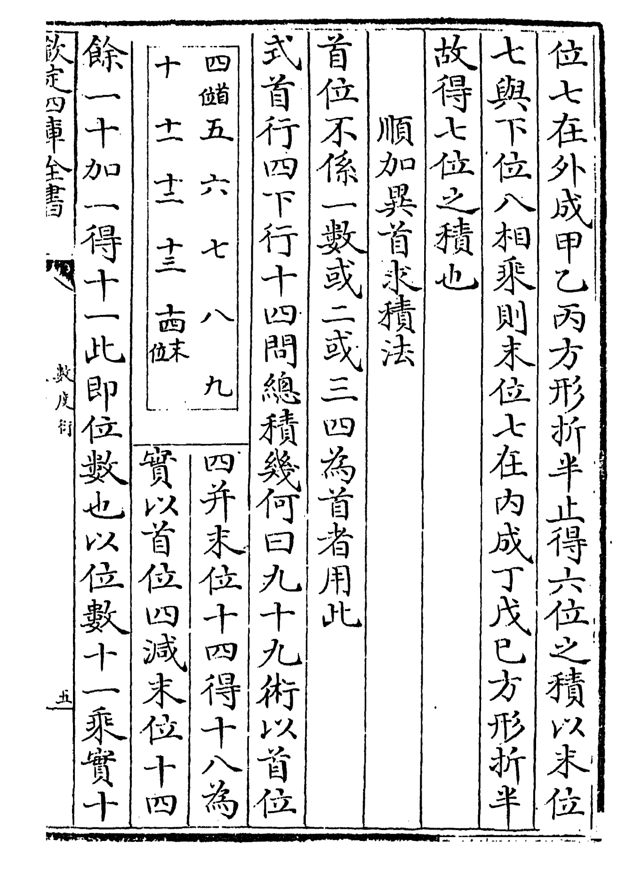
式下行濶十五問總積幾何曰一百二十術取最下二

位十四十五相乘得二百一十半之得一百。五即十

| 一首位 | 二 | 三 | 四 | 五 |
|---|---|---|---|---|
| 六 | 七 | 八 | 九 | 十 |
| 十一 | 十二 | 十三 | 十四 | 十五末位 |

四以至首位一之積也再并末位十五得一百二十為總積又術以末位十五與下位十六相乘得二百四十半之得一百二十亦合

通曰相乘得其倍數者變三角為四角也半之則仍還三角矣如末位係七以六七相乘則末



位七在外成甲乙丙方形折半止得六位之積以末位七與下位八相乘則末位七在內成丁戊已方形折半故得七位之積也

順加異首求積法

首位不係一數或二或三四為首者用此

式首行四下行十四問總積幾何曰九十九術以首位

| 四首位 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 |
|---|---|---|---|---|---|
| 十 | 十一 | 十二 | 十三 | 十四末位 | |

四并末位十四得十八為實以首位四減末位十四餘一十加一得十一此即位數也以位數十一乘實十

八得一百九十八半之得九十九為總積

四面順加求積法

式四面順加每面底濶皆十二問總積幾何曰六百五十術置底濶十二另以十二加一為十三乘之得一百五十六又以十二加半為十二五乘之得一千九百五十為實以三除之得六百五十為總積

長濶順加求積法

式長濶順加底濶八長十三問總積幾何曰三百八十四術以底長十三減底濶八餘五折半得二五又加半

得三并長十三為十六以潤八乘之得一百二十八另以潤八加一為九乘之得一千一百五十二為實以三除之得三百八十四為總積

通曰四面順加自一面視之則為順加以四面合視之則非順加也其加有二一曰奇數之加一曰自乘之加如頂一加三得四為第二層之積四加五得九為第三層之積九加七得十六為第四層之積總以奇數逐漸加於每層積上故至十一層應加二十三得一百四十四為第十二層之積此奇數之加也又如一至十二層

每層以自乘數推之首層一自乘仍是一二層二自乘得四三層三自乘得九四層四自乘得十六至十二層十二自乘得一百四十四亦合各層之積此自乘之加也長濶順加自濶面視之則為順加自長面視之則為順加異首而四面合視之其加亦有二一曰遞四加周一曰奇偶加積如異首之首層為五此層加法稍不同先倍五為十又加二得十二為第二層之周此後每層加四以十二加四得十六為第三層之周十六加四得二十為第四層之周二十加四得二十四為第五層之

周如法加至第八層濶八長十二得周三十六此遞四加周也又如首層五加七得十二為第二層之積十二加九得二十一為第三層之積二十一加十一得三十二為第四層之積總以奇數漸加於每層積上加至第八層得積九十六此奇數加積也若前式濶八長十三首層係六者則偶數加積矣

奇偶超加求積法

奇數超加求積式末位十九問總積幾何曰一百術取末位十九外加一得二十半之得十即一至十九之位

| 一 | 三 | 五 | 七 | 九 |
|---|---|---|---|---|
| 十一 | 十三 | 十五 | 十七 | 十九末位 |

數也以位數十自乘得一百為總積

偶數超加求積式末位二十四問總積幾何曰一百五

| 二 | 四 | 六 | 八 | 十 | 十二 |
|---|---|---|---|---|---|
| 十四 | 十六 | 十八 | 二十 | 二十二 | 二十四末位 |

十六術取末位二十四減半得十二即位數也以位數加一為十三以乘位數十二得一百五十六為總積

通曰用前超加求積法亦可

超加求首尾數法

若多中起數超位遞加但知位數及所超毋數或知首而不知尾或知尾而不知首者用此

超加求尾數式超八遞加至十二位首位三問尾位數幾何曰尾位數九十一術於位數十二內減一存十一與超毋八相乘得八十八加首位三得九十一即尾位數

| 三首位 | 十一 | 十九 | 廿七 | 卅五 | 四三 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 五一 | 五九 | 六七 | 七五 | 八三 | 九一末位 |

超加求首數式超八遞加至十二位尾位九十一問首位數幾何曰首位數三術於位數十二內減一存十一

與超母八相乘得八十八以減尾位九十一餘三即首位數

積和求位數及首尾二位數法

若但舉總數及超數及首尾和數而不知係幾位不知首尾二位數者用此

式超六遞加總積三百二十首尾和一百六十問位數及首尾各幾何曰四位首位七十一尾位八十九術以總積三百二十為實以首尾和一百六十減半得八十除實得四為

七一首　七七　八三　八九尾位

位數又以位數減一餘三乘超母六得十八為位母率
以位母率并首尾和一百六十得一百七十八半之得
八十九為尾位數以位母率減首尾和餘一百四十二
半之得七十一為首位數

積較求首尾二位數法

若但舉總數及位數及首尾較數而不知首尾二位數
者用此

式超六遞加計六位總積四百九十八首尾之較三十
問首尾各幾何曰首位六十八尾位九十八術倍總積

| | |
|---|---|
| 六八首位 七四 八十 | 八六 九二 九八尾位 |

得九百九十六為實以位數六除之得一百六十六以較三十減之餘一百三十六折半得六十八為首位數以首位數加較三十得九十八為尾位數

超加求逐位細數法

若但知位數總數及超母數而不知每位細數者用此式超三遞加計六位總積八十七問逐位細數幾何曰首位七二位十三位十三四位十六五位十九末位二十一術取位數六除去第六數自一二三四至五并得

七首位 十二位 十三三位
十六四位 十九五位 廿二末位

十五以乘超母三得四十五以減總積八十七餘四十二為實以位數六除之得七為首位數加超母三得十為二位數遞加超母得逐位數

通曰以位數減一位如六位者止用五位以超母三遞加之一位應三二位應六三位應九四位應十二五位應十五乃并此五位應得之數為四十五以減總積餘為實亦可

又式兄弟九人遞差三歲共二百〇七歲問每人歲幾

何曰最小一人十一歲逐位加三得每人歲數術將九人除去一位止作八人自一至八并得三十六乘遞差三得一百○八以減共二百○七餘九十九為實以九人除之得一十一為最小一人之歲數又術通曰以共二百○七歲為實以九人除之得二十三為居中第五人之歲數凡奇數如九人者可以用此若係偶數如前式六位者則以總積八十七為實以六位除之得十四五為居中二位率又以超母三折半得一五為母率以母率減中率餘十三為第三位之數以母率并中率得十

六為第四位之數也

又式銀九百九十六兩給八人每人遞差十七兩問每人幾何曰最少一人六十五兩術將八人除去一人止作七人自一至七并得二十八乘遞差十七得四百七十六以減銀九百九十六餘五百二十為實以八人除之得六十五為最少一人之銀數

通曰九人八人皆位數也差三差十七皆超母也二百○七歳九百九十六兩皆總積也

超加求超母及逐位細數法

若超位遞加但知係幾位及前幾位共數後幾位共數而不知超母及逐位細數者用此

式甲乙丙丁戊巳庚辛八位超加甲乙二位共數七十七巳庚辛三位共數六十六問超母幾何逐位細數幾何曰超母三甲位四十辛位十九術以甲乙二位二乘巳庚辛共數六十六得一百三十二以巳庚辛三位三乘甲乙共數七十七得二百三十一相減餘九十九為實又并甲乙位二巳庚辛位三為五減半得二

| 甲四十 | 乙三十七 | 丙三十四 | 丁三十一 |
|---|---|---|---|
| 戊二十八 | 己二十五 | 庚二十二 | 辛十九 |

五以減總位八餘五五以甲乙位二巳庚辛位三相乘得六乘之得三十三為法以法除實得三為趨母并入甲乙共數七十七得八十減半得四十為甲位數若求巳庚辛則三分其巳庚辛共數六十六得二十二為居中庚位數減趨母三餘十九為辛位數自甲向乙推之則遞減趨母自辛向庚推之則遞加趨母八位細數盡得也　如戊巳庚辛四位共數九十四以二分之得四十七即巳庚共數并入趨母三得五十減半得二十五為巳位數也

外包 少廣之五

通曰方者以八包一每層加八即超八遞加也圓者以六包一每層加六即超六遞加也三角以九包一每層加九即超九遞加也然其形不同而法又異故專衍之

包方法

外周求積式外周三十二問總積幾何曰八十一術除中心一在外以二層八與外周三十二相并得四十又以四十與外周三十二相乘得一千二百八十為實以三層十六為法除之得八十加中心一得八十一為總

乙 丙 十 甲 丁

方八包一五層外周三十二

積

通曰方徑一周四今八包一徑三周八者何也葢四隅之甲乙丙丁各以兩面為一數也若以兩面俱作二數則仍是徑三周十二矣

積求外周式總積八十一問外周幾何曰三十二術去中心一在外餘八十以三層十六乘之得一千二百八十為實以二層八（即縱母）為縱用帶縱開平方除之（詳十二卷）得三十二為外周

外周求層式外周三十二問層幾何曰除心四層連心五層術以超母八除外周三十二得四即除心之層數也加心一層共五層

外周及層數求積式外周三十二除心四層問總積幾何曰八十一術除中心一在外以二層八并外周三十二得四十以四層乘之得一百六十減半得八十加中心一得八十一為總積

包圓法

外周求積式外周三十六問總積幾何曰一百二十七

圖六包一七層外周三十六

術除中心一在外以二層六與外周三十六相并得四十二又以四十二與外周三十六相乘得一千五百一十二為實以三層十二為法除之得一百二十六加中心一得一百二十七為總積

通曰圓徑一周三今六包一徑三周六者何也蓋其數隱而不見須從徑三之外作一大圜切各小圜之邊而於大圜之上作甲乙丙丁戊巳六段每段截大圜周與小圜徑等是巳

得周六矣又測子丑寅卯辰午六空處每一空處得小
圜半徑應折為三段合甲乙丙丁戊巳六段而為九則
仍是徑三周九也但六包一六角而非圓以此為率亦
得其成數也
積求外周式總積一百二十七問外周幾何曰三十六
術去中心一在外餘一百二十六以三層十二乘之得
一千五百一十三為實以趓母六即二層為縱用帶縱開
平方法除之得三十六為外周
外周求層式外周三十六問層幾何曰除心六層連心

七層術以趨毋六除外周三十六得六即除心之層數也加心一層共七層

外周及層數求積式外周三十六除心六層問總積幾何曰一百二十七術除中心一在外以二層六并外周三十六得四十二以六層乘之得二百五十二減半得一百二十六加中心一得一百二十七為總積

包三角法

外周求積式外周三十六問總積幾何曰九十一術除中心一在外以二層九與外周三十六相并得四十五

又以四十五與外周三十六相乘得一千六百二十為實以三層十八為法除之得九十加中心一得九十一為總積

三角九包一五層外周三十六

積求外周式總積九十一問外周幾何曰三十六術除中心一在外餘九十以三層十八乘之得一千六百二十為實以超母九為縱用帶縱開平方法除之得三十六為外周

外周求層式外周三十六問層幾何曰除心四層連心五層術以超母九除外周三十六得四即除心之層數

也加心一層共五層

外周及層數求積式外周三十六除心四層問總積幾何曰九十一術除中心一在外以二層九并外周三十六得四十五以四層乘之得一百八十減半得九十加中心一得九十一為總積

通曰方圓三角皆一法也但趨毋不同耳用前趨加求積法亦可

包立方立圓立三角法

通曰立方圓三角之外包非遞加也立方以二十六包

一三層則九十八四層則二百一十八立圓以十四包
一三層則五十四層則一百一十立三角以三十四包
一三層則一百三十四層則三百八十一數不相等故
不可以超加論也
立方面求層式　立方面九問層幾何曰除心四層連心
五層術通曰以面九去中心一存八折半得四即除心
之層數也加心一為五層每層一面加二故二數為一
層也
立方層求面式　立方除心四層問面幾何曰九術通曰

以四層倍之為八如中心一得九即方面

立方面求外包式立方面九問外包幾何曰三百八十

六術通曰用六方算之先推前後以面九自乘得八十一倍之得一百六十二為前後包數次推左右以面九減二（近前之邊去一近後之邊去一）餘七與面九相乘得六十三倍之得一百二十六為左右包數再推上下以面九減二餘七自乘得四十九（左右上去前後之邊一故七九相乘上下則左右前後之邊各去一故七自乘）倍之得九十八為上下包數并三

包數得三百八十六為外包數又術通曰以面九自乘得八十一再乘得七百二十九為全積以面九減二餘七自乘得四十九再乘得三百四十三以減全積餘三百八十六為外包又術通曰以面九減一餘八與面九相乘得七十二四倍之得二百八十八又以面九減二餘七自乘得四十九倍之得九十八相并得三百八十六亦合

立圓徑層相求式通曰與立方同術每層一面亦加二故也中心亦作一層

立圓徑求外包式　立圓徑九問外包幾何曰一百九十

橫面

每行五者二十四
每行六者十八
每行七者十二
每行八者六
中行九者乃心也
橫視如此

上面

周二十四者行五
周十八者行六
周十二者行七
周六者行八
中心與周而行九
直視如此

四術通曰先求層數得連心五層又用前六包一之法除內四層得外周二十四與五層相乘得一百二十為外層橫包數以外周二十四減超每六餘十八以十八為周用前平圓周求積法得積三十七倍之得七十四為上下兩包數并二包數得一百九

十四為外包數

通曰亦立六方而非立圓也連心層數必與其六方之一方等如今連心五層每方亦五數也

立三角底求層式　立三角底十七問層幾何曰除心四層連心五層　通曰以底十七去中心一存十六以四除之得四即除心之層數也加心一為五層每層加四故四數為一層也

立三角層求底式　立三角除心四層問底幾何曰十七　通曰以四層與四相乘得十六加中心一得十七即

底

立三角底求外包式　立三角底十七問外包幾何曰五百一十四術通曰以底十七用前順加求積法得一百五十三為底包數以底十七減一餘十六為頂至底上一重之重數自內至外曰層自上至下曰重既知為十六重便可推每重之周包數矣第十六重之底即十六減一得右腰十五又減一得左腰十四以底腰相并得四十五為第十六重之周包數從此遞減三數推之以四十五減三餘四十二為第十五重之周包數減三餘三十九為第十

底減一兩腰各減一為上一層之周包數故每層減三數也



四重之周包數減三餘三十六為第十三重之周包數減三餘三十三為第十二重之周包數減三餘三十為第十一重之周包數減三餘二十七為第十重之周包數減三餘二十四為第九重之周包數減三餘二十一為第八重之周包數減三餘十八為第七重之周包數減三餘十五為第六重之周包數減三餘十二為第五重之周包數減三餘九為第四重之周包數減

三餘六為第三重之周包數減三餘三為第二重之周
包數頂重止一數并諸包數得三百六十一為總腰包
數再并底包數得五百一十四為外包數若用前超加
求積法以第十六重之四十五為末位求得積三百六
十一即總腰包數也又術通曰立三角凡四面一面為
底其三面皆腰今分為左腰右腰後腰以推之如前術
既得底包數一百五十三之後即以底十七減一餘十
六用順加求積法得積一百三十六為左腰包數又以
底十七減二餘十五用順加求積法得積一百二十為

右腰包數又以底十七減三餘十四用順加求積法得積一百〇五為後腰包數并三腰包數得三百六十一合總腰包數再并底包數得五百一十四亦合外包數也

倍加少廣之六

二因加

一　二　四　八　十六　三十二　六十四　一百二十八

三因加

一　三　九　二十七　八十一　二百四十三

求倍

倍即母也欲求其母者則取挨身小數於本數中減之以二減盡者倍一也以三減盡者倍二也如三十二挨身小數為十六以十六於三十二中減之兩回十六減盡矣知是加一倍數又如八十一挨身小數為二十七以二十七於八十一中減之三回二十七減盡矣知是加二倍數

截三位較

凡截取三位以首尾二位相乘其所得數與中一位之自乘數等如截二四八以二與八相乘得十六四自乘亦十六

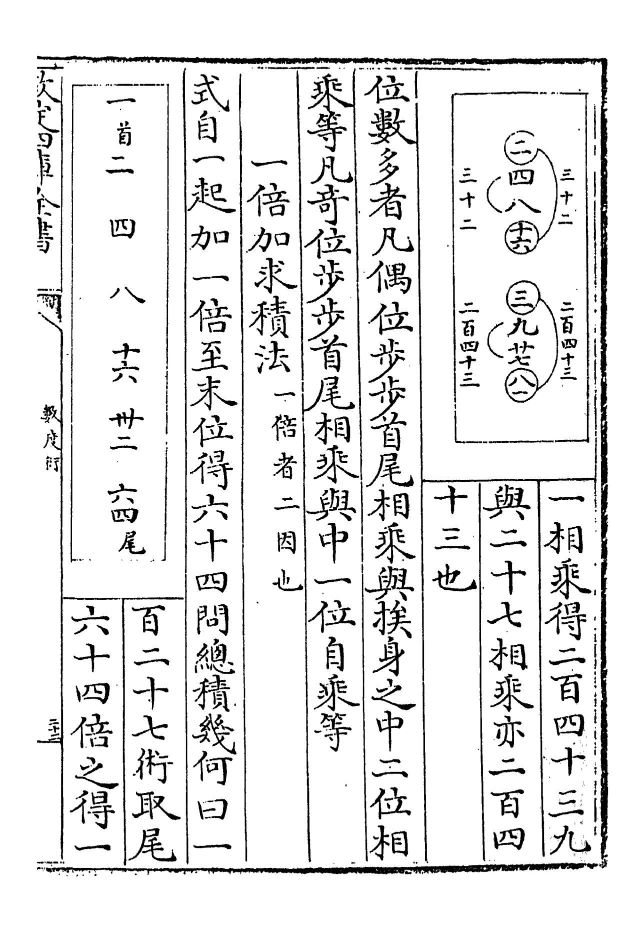
二　四　八
十六　十六

三　九　廿七
八十一　八十一

也如截三九二十七以三與二十七相乘得八十一九自乘亦八十一也

截四位較

以首尾二位相乘其所得數與中二位相乘之數等如截二四八十六以二與十六相乘得三十二四與八相乘亦三十二也如截三九二十七八十一以三與八十



二　四　八　十六　三十二　三十二

三　九　廿七　八十一　二百四十三　二百四十三

一相乘得二百四十三九與二十七相乘亦二百四十三也

位數多者凡偶位步步首尾相乘與挨身之中二位相乘等凡奇位步步首尾相乘與中一位自乘等

一倍加求積法　一倍者二因也

式自一起加一倍至末位得六十四問總積幾何曰一百二十七術取尾六十四倍之得一

一首　二　四　八　十六　卅二　六十四尾

百二十八於內減首一餘一百二十七即七位總積也

用後式之術亦可

二倍加求積法（二倍者三因也）

式自一起加二倍至末位得八十一問總積幾何曰一百二十一術取尾八十一於內減首一餘八十以倍母二（二倍以二為倍母　三倍以三為倍母）除之得四十再併尾八十一得一百二十一為總積

一首　三　九　廿七　八十一尾

通曰倍母必減其因一數故三因以二為倍母也三倍

四倍以至多倍皆同此法惟各用其倍母耳

半倍加求積法

加一倍又二之一者即半倍加即四六衰分也如首位四次位加首位四之半為六也

式自四起半倍加至末位得四十五零十六之九問總積幾何曰一百二十八又十六分之十一術取尾四十五又十六之九內減首四餘四十一又十六之九以倍

| 首位 | | | | | | 尾位 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 四 | 六 | 九 | 一三 | 二〇 | 三〇 | 四五 |
| | | | 二之一 | 四之一 | 八之三 | 十六之九 |

母半數除之（用奇零除法詳筆算）得八十三又八之三再并尾數得一百二十八又十六之十一（用奇零加法）為總積

倍加隔位合數法

抽中一位前與後合式凡倍加數不論共有幾位但就

| 前四位 | | | | | | | | 後四位 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 一 | 二 | 四 | 八 | 十六 | 卅二 | 六四 | 百廿八 | 二百五六 |
| 首位 | 二位 | 三位 | 四位 | 五位 | 六位 | 七位 | 八位 | 九位 |

中抽取一位之

數自乘視所抽之位至首幾位則自乘之數必與此後幾位相同也如抽第五位以十六自乘得二百五十六自首至十六得五位除第五本位則前有四位也其後

四位之數必二百五十六矣

通曰以前得四位倍之得八加所抽一位得九則所抽之位數自乘與第九位數同矣

抽中二位前與後合式於多位之中前抽一位後抽一位相乘則視前抽之位去首幾位後抽之位再去幾位其數必與此相乘之數合也如前抽第二位其數二後抽第四位其數八相乘得十六前抽之位去首一位則後抽之位再去一位其數亦必十六也

前一位
一 首位
前
二 二位
四 三位
後
八 四位
後一位
十六 五位

倍抽減一前合後式不必算其前後之位但視所抽為第幾位倍其位數減一得後應合之位則所抽位數自乘

| 首位 | 二位 | 三位 | 四位 | 五位 |
|---|---|---|---|---|
| 一 | 二 | 四 | 八 | 十六 |

必與後位數合也如抽第三位倍為六減一得五則第三位之四自乘得十六必與第五位之數合也

減位倍抽前合後式先排倍數於右次排位數於左須除首位不算自次位作一位排之抽第幾位倍之不

| 倍數 | 位數 |
|---|---|
| 一 | ○ |
| 二 | 一 |
| 四 | 二 |
| 八 | 三 |
| 十六 | 四 |

必減一即得應合之位則所抽位之自乘必與後位數

合也如抽第二位倍為四則第二位之四自乘得十六必與第四位之數合也

減位并抽前合後式抽兩位之互乘則并所抽之兩位共為幾位即知互乘之數必與其位數合也如抽第

| 倍數 | 一 | 二 | 四 | 八 | 十六 |
|---|---|---|---|---|---|
| 位數 | ○ | 一 | 二 | 三 | 四 |

一位第三位二與八互乘得十六以一位與三位并為四位則第四位之數必十六也互乘即相乘以上皆首位起一者

異首減位倍抽及并抽式若首位不自一起或二或三

四起者則抽一位抽二位其自乘互乘之數皆先取首位之數除之而後倍位并位以求合數之位也如抽第二位其數二十自乘得四百為實以首數五為法除之得八十再倍第二位為四則第四位之數必八十也

| 倍數 | 位數 |
| --- | --- |
| 五 | ○ |
| 首 十 | 一 |
| 廿 | 二 |
| 卌 | 三 |
| 八十 | 四 |

又如抽第一位第三位其數十與四十互乘得四百為實以首數五為法除之得八十再并第一位第三位為四則第四位之數必八十也

| 倍數 | 位數 |
| --- | --- |
| 五 | ○ |
| 首 十 | 一 |
| 廿 | 二 |
| 卌 | 三 |
| 八十 | 四 |

截位合前積式凡倍一加者（即二內）就中隨意截取一位

一（首位） 二（二位） 四（三位） 八（四位） 十六（五位） 三十二（六位） 六十四（七位）

以其所截位之數減一即合所截位

以前各位之總積凡自一起者用之如截第七位其數六十四減一得六十三即首位至六位之總積也

截位合前後積式如右式六十三為首至六位之總積

前管六位：一（首） 二 四 八 十六 三十二（位六）

六 五 四 三 二 一

後管六位：六十四（位七） 百二十八 二百五十六 五百一十二 千〇二十四 二千〇四十八（位十二）

一 二 三 四 五 六

四千〇九十六（位十三）

若以此六位為主加一得六十四自乘得四千〇九十

六減一得四千。九十五即首至十二位之總積矣葢以六位為主以前管六位以後亦管六位也即以六加一倍亦得十二位

通曰凡倍一加者隨抽一位於其數内減一餘必為以前諸位之總積也如抽第三位四減一餘三必為以前一位二位之積三也又如抽第四位八減一餘七必為以前一位二位三位之積七也故抽第十三位四千。九十六減一餘四千。九十五必為以前首至十二位之總積也

又式借銀一兩每日加息一倍至第六十四日問共銀幾何曰一千八百四十四兆六千七百四十四萬○七百三十七億○九百五十五萬一千六百一十五兩術試截四位曰一曰二曰四曰八共積十五加一爲十六自乘得二百五十六內減一餘二百五十五即係第八位之積再加一自乘得六萬五千五百三十六內減一餘六萬五千五百三十五即係第十六位之積再加一自乘得四十二億九千四百九十六萬七千二百九十六減一餘四十二億九千四百九十六萬七千二百九

十五即係第三十二位之積再加一自乘得一千八百四十四兆六千七百四十四萬〇七百三十七億〇九百五十五萬一千六百一十六減一即係第六十四位之積也六十四位即六十四日也

通曰不必加減以第五日之數自乘得第九日之數又自乘得第十七日之數又自乘得第三十三日之數又自乘得第六十五日之數減半為第六十四日之積也

蓋五日加四而為九日倍四為八故九日加八日而為十七日倍八為十六故十七日加十六日而為三十三

日倍十六為三十二故三十三日加三十二日而為六十五日也倣此推之可至無窮均輸章有三術更覺簡易

數度衍卷十一